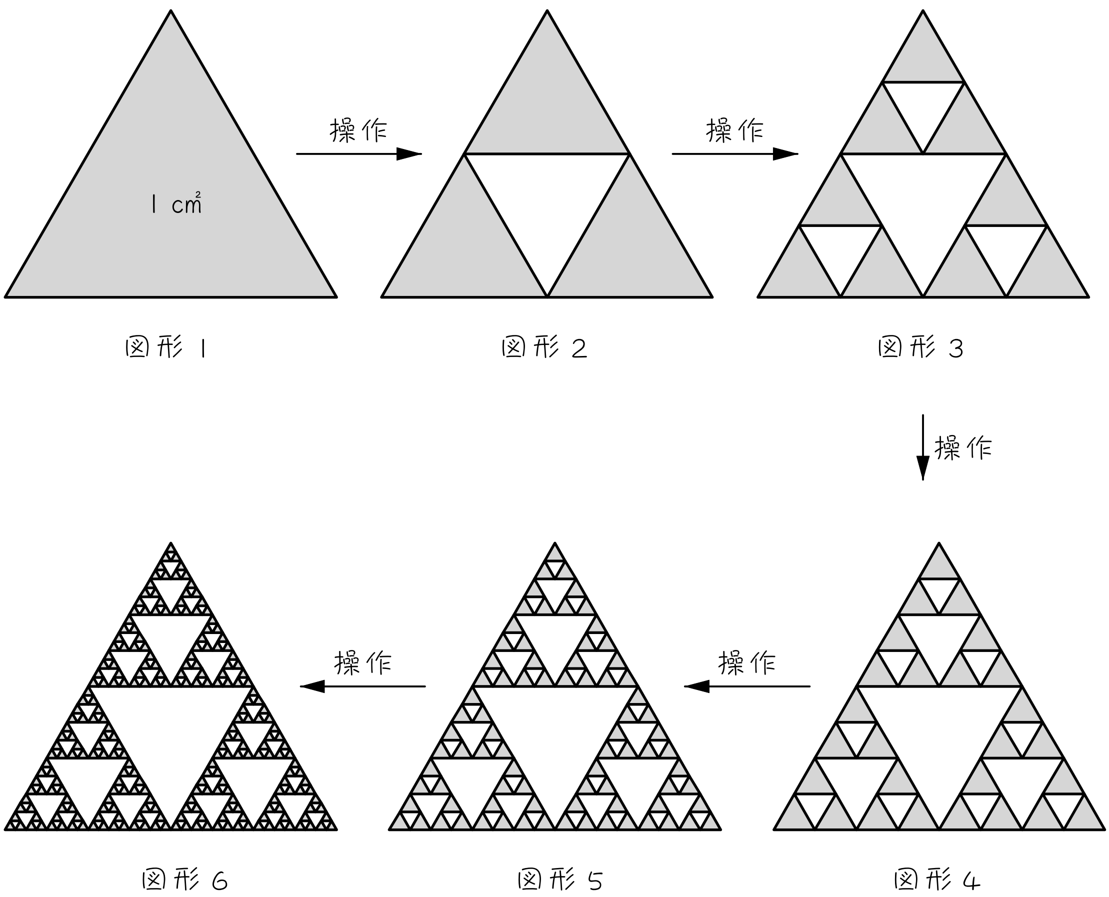
ステップ1

1 黒く色を塗った正三角形に、次の操作をくり返していきます。

【操作】 正三角形の各辺を２等分した線を結んで正三角形を４等分し、まん中の正三角形を白く塗る。

次の図は、この操作を５回行った様子を表しています。これらを順番に図形１、図形２、…と呼ぶことにします。図形１が１㎠のとき、次の問いに答えなさい。



(1)　下の表を利用して、図形１～５の黒い正三角形の面積の和と白い正三角形の面積の和を求めなさい。

図形	1	2	3	4	5
黒い正三角形１個の面積(㎠)					
黒い正三角形の個数(個)					
黒いの正三角形の面積の和(㎠)					
白い正三角形の面積の和(㎠)					

(2)　(1)より、１回の操作で、

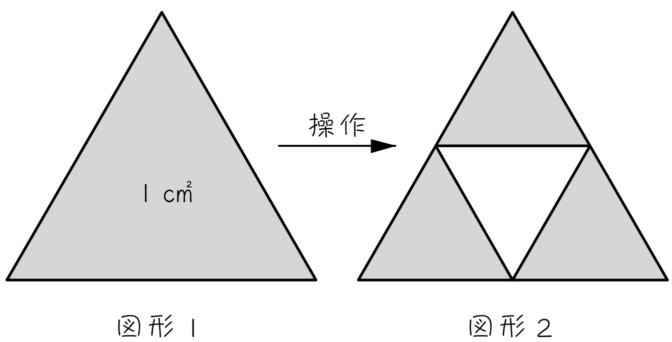
①　黒い正三角形１個の面積は、操作前の（　　　）倍になります。

②　黒い正三角形の個数は、操作前の（　　　）倍になります。

③　黒い部分の面積は、操作前の（　　　）倍になります。

(3)　(2)の③の結果について考えます。

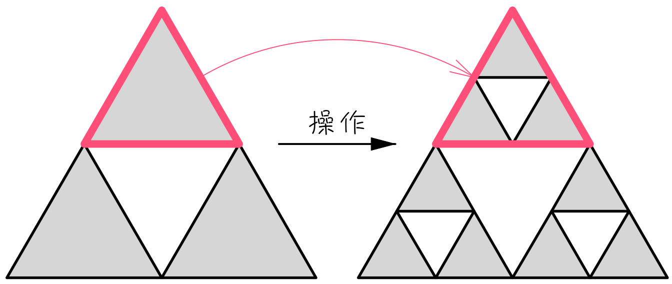
①　１回目の操作で、黒い部分の面積は操作前の（　　　）倍になります。



図形１　　図形２

② <u>２回目</u>の操作について考えます。

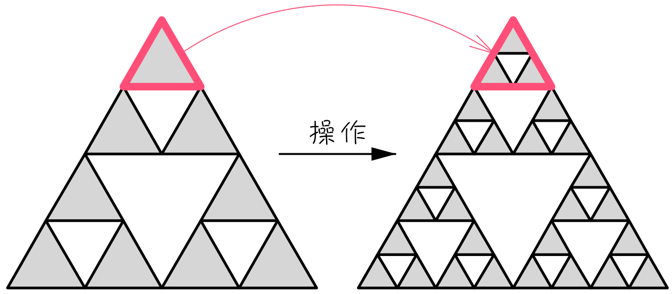
下の図のように、赤い太線部分だけを考えると、黒い部分の面積は（　　　）倍になります。他の部分も同様なので、<u>２回目</u>の操作で、黒い部分の面積は操作前の（　　　）倍になります。



図形２　　図形３

③ <u>３回目</u>の操作について考えます。

下の図のように、赤い太線部分だけを考えると、黒い部分の面積は（　　　）倍になります。他の部分も同様なので、<u>３回目</u>の操作で、黒い部分の面積は操作前の（　　　）倍になります。



図形３　　図形４

④ 以下、同じことをくり返すので、結局、１回の操作で黒い部分の面積は必ず（　　　）倍になります。

(4)　下の表を利用して、図形１～５の白い正三角形の個数の和を求めなさい。

図形	1	2	3	4	5
白い正三角形の個数の和(個)	0				

増える白い正三角形の個数(個)　○　○　○　○

(5)　白い三角形の面積の和を直接求めてみましょう。

下の表を利用して、図形１～５の白い正三角形の面積の和を求めなさい。

図形	1	2	3	4	5
白い正三角形の面積の和(cm²)	0				

③ 増える白い正三角形の面積の和(cm²)　○　○　○　○

↑　↑　↑　↑

① 増える白い正三角形１個の面積(cm²)　○　○　○　○

×　×　×　×

② 増える白い正三角形の個数(個)　○　○　○　○

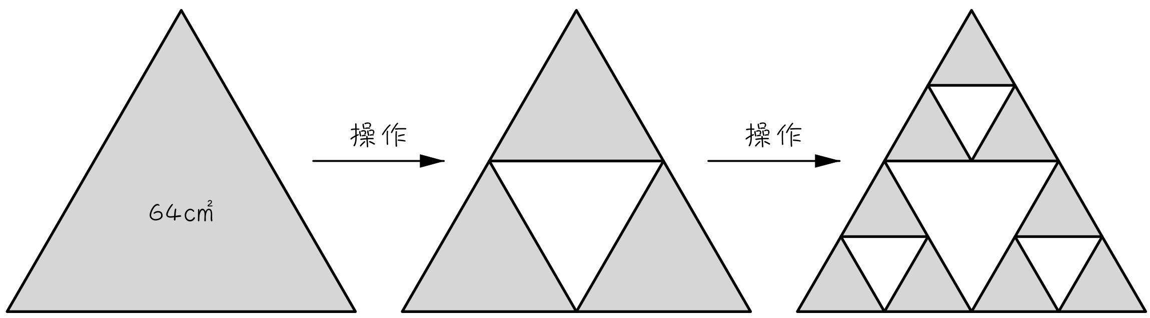
※黒い部分よりも、白い部分について考える方が難しくなります。

白い部分は、差が等比数列になります。

2　黒く色を塗った正三角形に、次の操作をくり返していきます。

【操作】 正三角形の各辺を２等分した線を結んで正三角形を４等分し、まん中の正三角形を白く塗る。

次の図は、この操作を２回行った様子を表しています。これらを順番に図形１、図形２、…と呼ぶことにします。図形１が 64 ㎠のとき、次の問いに答えなさい。



図形１　　図形２　　図形３

(1) 下の表を利用して、図形１～５の黒い正三角形の面積の和を求めなさい。

図形	1	2	3	4	5
黒い正三角形１個の面積(㎠)					
黒い正三角形の個数(個)					
黒い正三角形の面積の和(㎠)					

(2)　下の表を利用して、図形1～5の白い正三角形の面積の和を求めなさい。

図形	1	2	3	4	5
白い正三角形の面積の和(cm²)	0				

③ 増える白い正三角形の面積の和(cm²)

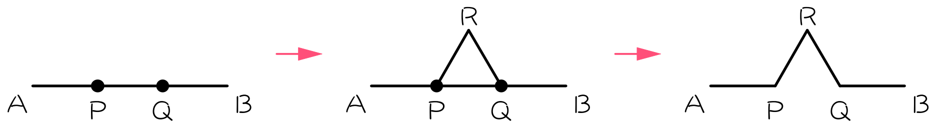
① 増える白い正三角形1個の面積(cm²)

② 増える白い正三角形の個数(個)

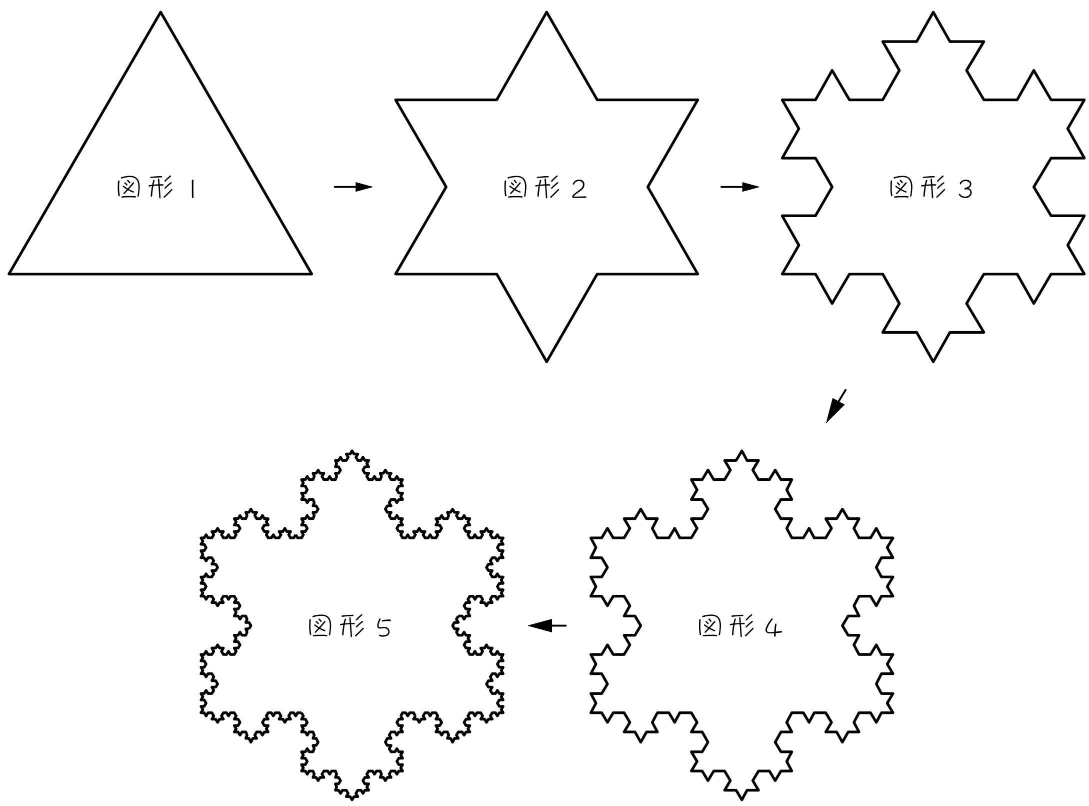
ステップ２

3　正三角形に次の操作をくり返していきます。

【操作】辺の１つをＡＢとします。辺ＡＢを３等分する点Ｐ、Ｑをとり、図形の外に正三角形ＰＱＲをつくります。そして、辺ＡＢを折れ線ＡＰＲＱＢにおきかえます。



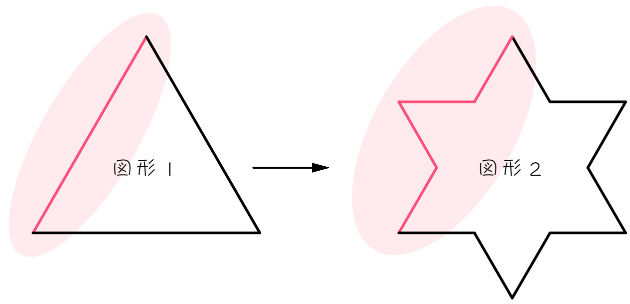
次の図は、この操作を４回行った様子を表しています。これらを順番に、図形１、図形２、・・・と呼ぶことにします。



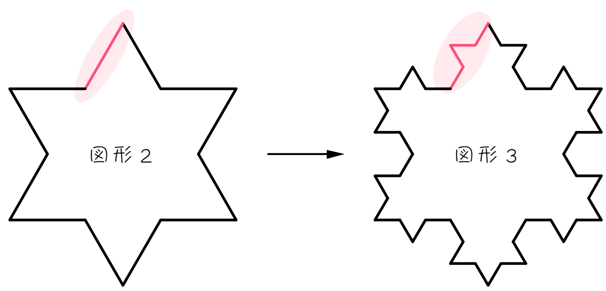
(1) 図形の辺の数について考えます。

① 図形１の辺の数は （ア　　　） 本です。

② 図形１の１辺だったところが、図形２では辺が （イ　　　） 本になっているので、図形２の辺の数は、（ア　　　） × （イ　　　） ＝ （ウ　　　） 本です。



③ 図形２の１辺だったところが、図形３では辺が （　　　） 本になっているので、図形３の辺の数は、（ウ　　　） × （　　　） ＝ （　　　） 本です。



④ 図形４の辺の数は、（　　　） × （　　　） ＝ （　　　） 本です。

⑤ 図形５の辺の数は、（　　　） × （　　　） ＝ （　　　） 本です。

(2)　図形１の１辺の長さを１cmとします。下の表を利用して、図形１～５の周囲の長さを求めなさい。

図形	1	2	3	4	5
1辺の長さ(cm)					
辺の数(本)					
周囲の長さ(cm)					

(3)　１回の操作で、

①　１辺の長さは、操作前の（　　　）倍になります。

②　辺の数は、操作前の（　　　）倍になります。

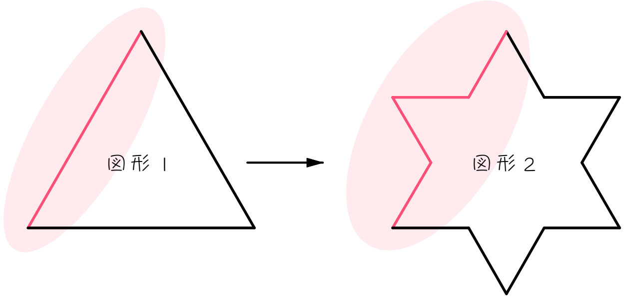
③　周囲の長さは、操作前の（　　　）倍になります。

(4)　(3)の③の結果について考えます。

①　下の図の赤い部分に注目します。

図形２の赤線の長さは図形１の赤線の長さの（　　　）倍です。

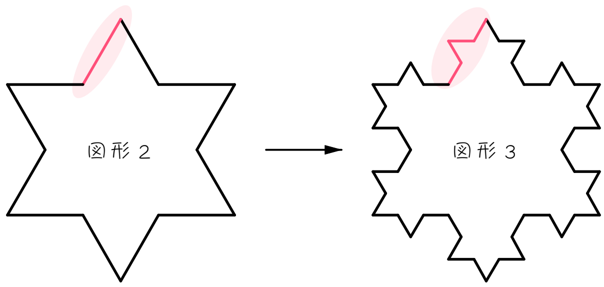
他の辺も同様なので、図形２の周囲の長さは、図形１の周囲の長さの（　　　）倍になります。仮分数で答えなさい。



②　下の図の赤い部分に注目します。

図形３の赤線の長さは図形２の赤線の長さの（　　　）倍です。

他の辺も同様なので、図形３の周囲の長さは、図形２の周囲の長さの（　　　）倍になります。仮分数で答えなさい。



③　以下、同じことをくり返すので、結局、１回の操作で黒い部分の周囲の長さは必ず（　　　）倍になります。

(4)　図形１の面積を１cm²とします。下の表を利用して、図形２～４の面積を求めなさい。

図形	1	2	3	4
面積(cm²)	1			

③
増える正三角形の面積の和(cm²)

↑　↑　↑

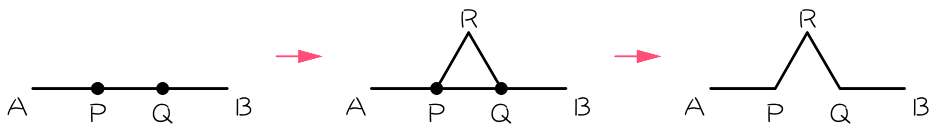
①
増える正三角形１個の面積(cm²)

×　×　×

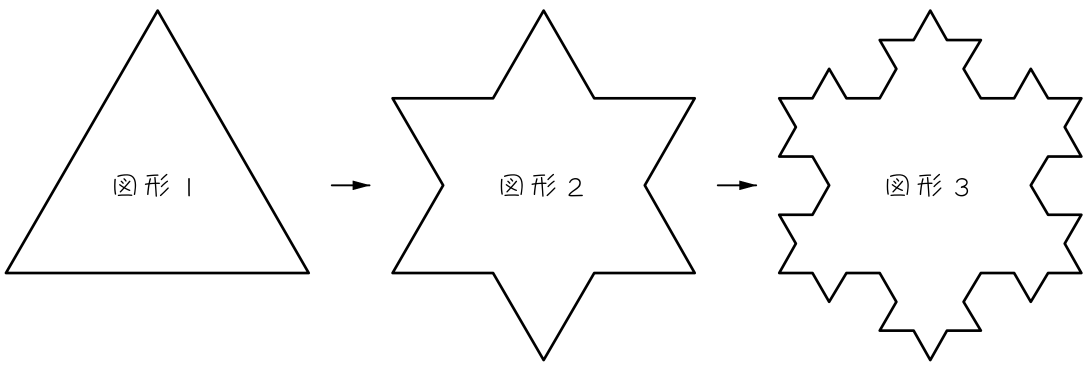
②
増える正三角形の個数(個)

4 正三角形に次の操作をくり返していきます。

【操作】辺の１つをＡＢとします。辺ＡＢを３等分する点Ｐ、Ｑをとり、図形の外に正三角形ＰＱＲをつくります。そして、辺ＡＢを折れ線ＡＰＲＱＢにおきかえます。



次の図は、この操作を２回行った様子を表しています。これらを順番に、図形１、図形２、・・・と呼ぶことにします。



(1)　図形１の１辺の長さが 27 cmのとき、下の表を利用して、図形１～５の周囲の長さを求めなさい。

図形	1	2	3	4	5
１辺の長さ(cm)	27				
辺の数(本)					
周囲の長さ(cm)					

(2)　図形１の面積が 729 ㎠のとき、下の表を利用して、図形２～４の面積を求めなさい。

図形	1	2	3	4
面積(㎠)	729			

③ 増える正三角形の面積の和(㎠)

① 増える正三角形１個の面積(㎠)

② 増える正三角形の個数(個)

ステップ３　練習問題

5

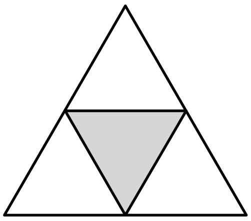
図１のように、同じ大きさの３つの正三角形と１つの黒い正三角形を組み合わせた模様を描きました、その後、次の操作をくり返し、規則的な模様をつくりました。ただし、①と②と行って、操作を１回行ったものとします。

操作

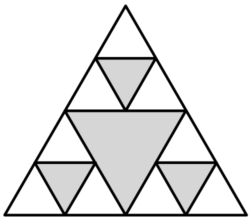
① すべての白い正三角形について、３つの辺をそれぞれ２等分する点を結んで、４つの同じ大きさの正三角形をつくる。

② ①でつくられた正三角形のうち、最初にかいた黒い正三角形と同じ向きの正三角形をすべて黒く塗(ぬ)りつぶす。

【図１】

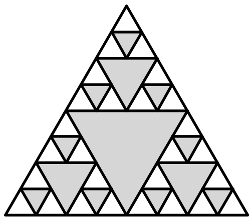


【図２】



操作１回終了

【図３】



操作２回終了

(1) 図３のように、操作が２回終わったときにできた模様には、黒い正三角形は何個ありますか。

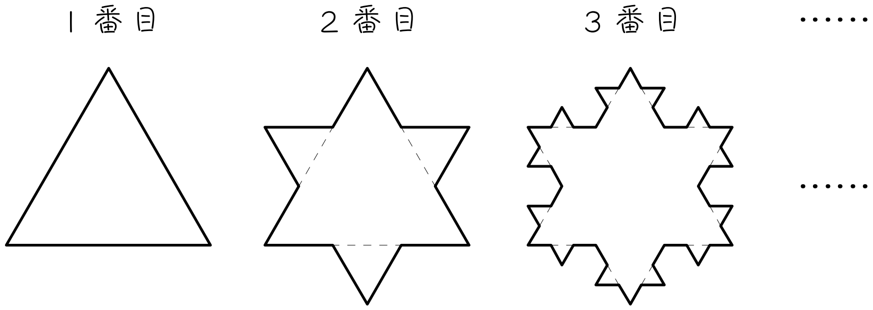
(2)　操作が3回終わったときにできた模様には、黒い正三角形は全部で何個ありますか。

(3)　操作が3回終わったときにできた模様にある黒い正三角形のなかで、最も小さな正三角形の面積を1㎠とします。このとき、次の問いに答えなさい。

①　図1の黒い正方形の面積は何㎠ですか。

②　すべての黒い正三角形の面積の和を求めなさい。

6 面積が９㎠の正三角形があります。この正三角形の各辺を３等分して、まん中の部分にその長さを１辺とする正三角形をつけ加えると２番目のような図形になります。同様に、２番目の図形の各辺を３等分して、まん中の部分にその長さを１辺とする正三角形をつけ加えると３番目のような図形になります。このような作業をくりかえすとき、次の問いに答えなさい。



(1) １番目の図形から２番目の図形になるとき、つけ加えられた正三角形の１つあたりの面積を求めなさい。

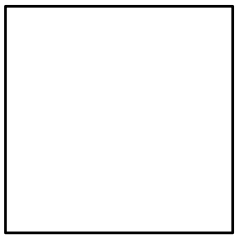
(2) ４番目の図形の辺の数を求めなさい。

(3) ４番目の図形から５番目の図形になるときにつけ加えられた正三角形の面積の合計を求めなさい。

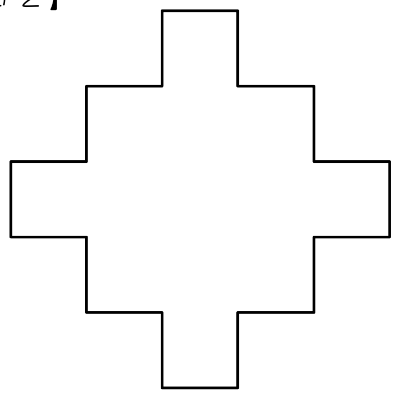
7

図１のような１辺の長さが９cmの正方形があります。この正方形の周の長さは36cm、面積は81㎠です。この正方形の１辺を３等分し、そこに新しく正方形をつくります（図２）。さらに新しくできた正方形の１辺を３等分し、そこに新しく正方形を作ります（図３）。さらに新しくできた正方形の１辺を３等分し、そこに新しく正方形を作ります（図４）。このとき、次の問いに答えなさい。

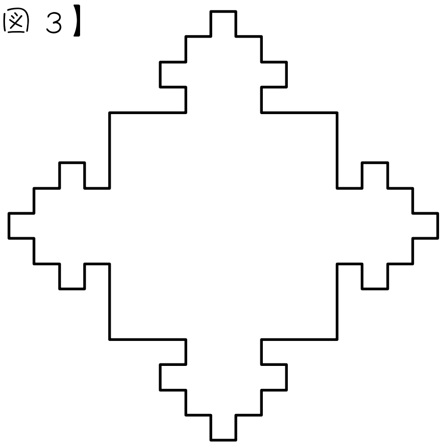
【図１】



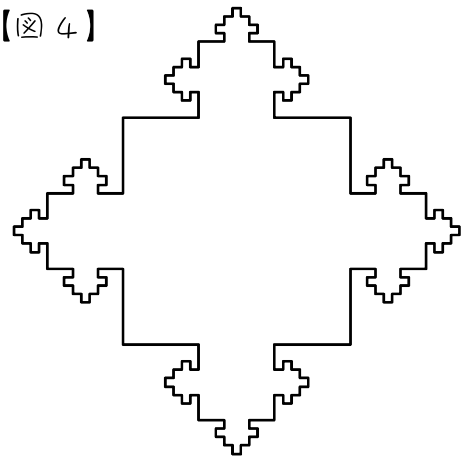
【図２】



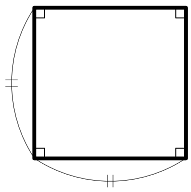
【図３】



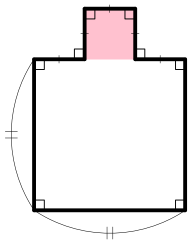
【図４】



(1)　図１～図４の面積について考えます。



【図C】



【図D】

上の図CとDの面積をくらべると、図Bの方が赤い正方形だけ増えます。

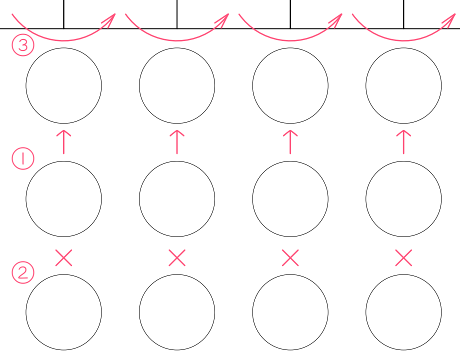
この考え方と下の表を利用して、図形１～５の面積を求めなさい。

図	1	2	3	4	5
面積(cm²)					

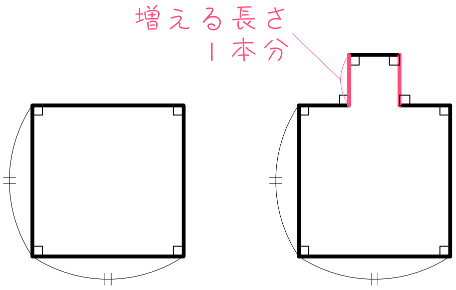
増える正方形の面積の和(cm²)

増える正方形の１個の面積(cm²)

増える正方形の個数(個)



(2)　図１～図４の周囲の長さについて考えます。

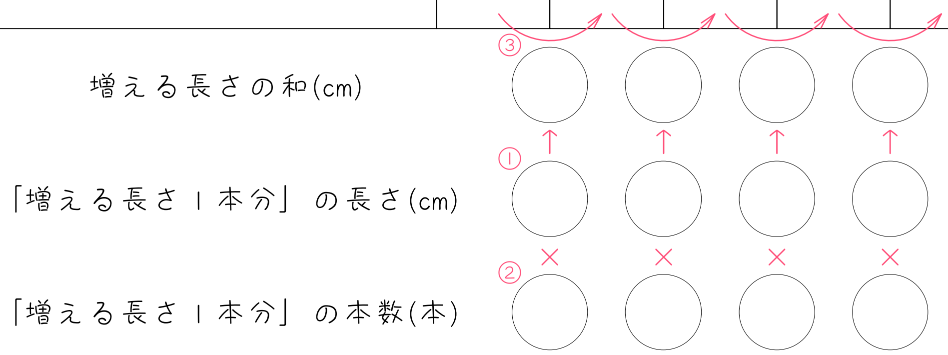


【図Ａ】　【図Ｂ】

上の図ＡとＢの周囲の長さをくらべると、図Ｂの方が赤線２本分だけ、周囲の長さが長くなります。このとき、赤線１本分を「増える長さ１本分」と呼ぶことにします。

この考え方と下の表を利用して、図形１～５の周囲の長さを求めなさい。

図	1	2	3	4	5
周囲の長さ(cm)					



■ 解答 ■

1

(1)

図形	1	2	3	4	5
黒い正三角形 1個の面積(cm²)	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$
黒い正三角形の 個数(個)	1	3	9	27	81
黒い正三角形の 面積の和(cm²)	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$
白い正三角形の 面積の和(cm²)	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{37}{64}$	$\frac{175}{256}$

(2) ① $\frac{1}{4}$ ② 3 ③ $\frac{3}{4}$

(3) ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{3}{4}$、$\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$、$\frac{3}{4}$

④ $\frac{3}{4}$

(4)

図形	1	2	3	4	5
白い正三角形の 個数の和(個)	0	1	4	13	40

増える白い正三角形の個数(個)	1	3	9	27

(5)

図形	1	2	3	4	5
白い正三角形の 面積の和(cm²)	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{37}{64}$	$\frac{175}{256}$

増える白い正三角形 の面積の和(cm²)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{256}$
	↑	↑	↑	↑
増える白い正三角形 1個の面積(cm²)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$
	×	×	×	×
増える白い正三角形 の個数(個)	1	3	9	27

2

(1)

図形	1	2	3	4	5
黒い正三角形 1個の面積(cm²)	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$
黒い正三角形の 個数(個)	1	3	9	27	81
黒い正三角形の 面積の和(cm²)	64	48	36	27	$20\frac{1}{4}$

(2)

図形	1	2	3	4	5
白い正三角形の 面積の和(cm²)	0	16	28	37	$43\frac{3}{4}$

増える白い正三角形 の面積の和(cm²)	16	12	9	$6\frac{3}{4}$
	↑	↑	↑	↑
増える白い正三角形 1個の面積(cm²)	16	4	1	$\frac{1}{4}$
	×	×	×	×
増える白い正三角形 の個数(個)	1	3	9	27

3

(1) ① 3

② 4、

3、4、12

③ 4、

12、4、48

④ 48、4、192

⑤ 192、4、768

(2)

図形	1	2	3	4	5
1辺の長さ(cm)	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$
辺の数(本)	3	12	48	192	768
周囲の長さ(cm)	3	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{256}{27}$

(3) ① $\frac{1}{3}$ ② 4 ③ $\frac{4}{3}$

(4) ① $\frac{4}{3}$、$\frac{4}{3}$ ② $\frac{4}{3}$、$\frac{4}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$

(5)

図形	1	2	3	4
面積(cm²)	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{40}{27}$	$\frac{376}{243}$

増える正三角形 の面積の和(cm²)	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{16}{243}$
	↑	↑	↑
増える正三角形 の1個の面積(cm²)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{729}$
	×	×	×
増える正三角形 の個数(個)	3	12	48

4

(1)

図形	1	2	3	4	5
1辺の長さ(cm)	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$
辺の数(本)	3	12	48	192	768
周囲の長さ(cm)	81	108	144	192	256

(2)

図形	1	2	3	4
面積(cm²)	729	972	1080	1128

増える正三角形の面積の和(cm²)	243	108	48
	↑	↑	↑
増える正三角形の1個の面積(cm²)	81	9	1
	×	×	×
増える正三角形の個数(個)	3	12	48

5

(1) 13 個

(2) 40 個

(3) ① 64 cm² ② 175 cm²

6

(1) 1 cm²

(2) 192 本

(3) $\frac{64}{243}$cm²

7

(1)

図	1	2	3	4	5
面積(cm²)	81	117	129	133	$134\frac{1}{3}$

増える正方形の面積の和(cm²)	36	12	4	$\frac{4}{3}$
	↑	↑	↑	↑
増える正方形1個の面積(cm²)	9	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$
	×	×	×	×
増える正方形の個数(個)	4	12	36	108

(2)

図	1	2	3	4	5
周囲の長さ(cm)	36	60	84	108	132

増える長さの和(cm²)	24	24	24	24
	↑	↑	↑	↑
「増える長さ1本分」の長さ(cm)	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
	×	×	×	×
「増える長さ1本分」の本数(本)	8	24	72	216

■ 解説 ■

5 (1)

図	1	2	3	4
黒い正三角形の個数の和(個)	1	4	13	40
増える黒い正三角形の個数(個)		3	9	27

増える黒い正三角形の個数は、
3個→9個
と、前に増えた黒い正三角形の個数の3倍になります。
よって、
1＋3＋9＝13(個)

(2) (1)と同様に考えて、
1＋3＋9＋27＝40(個)

(3) ① 1回の操作で、最小の正三角形の面積は$\frac{1}{4}$倍になります。
逆に、1回操作をもどすと、最小の正三角形の面積は4倍になります。よって、
1×4×4×4＝64(cm²)

② 64 cm²×1個＝64 cm²
16 cm²×3個＝48 cm²
4 cm²×9個＝36 cm²
1 cm²×27個＝27 cm²
よって、
64＋48＋36＋27＝175(cm²)

図形	1	2	3	4
黒い正三角形の面積の和(cm²)	64	112	148	175
増える黒い正三角形の面積の和(cm²)		48	36	27
増える黒い正三角形1個の面積(cm²)		16	4	1
増える黒い正三角形の個数(個)		3	9	27

6 (1) $9 \times \frac{1}{9} = 1$ (cm²)

(2)

図形(番目)	1	2	3	4
辺の数(本)	3	12	48	192
		×4	×4	×4

上の表のように、辺の数は前の図形の4倍になります。
よって、3×4×4×4＝192(本)

(3) 増える正三角形1個の面積は、
9 cm²→1 cm²→$\frac{1}{9}$cm²→$\frac{1}{81}$cm²→$\frac{1}{729}$cm²
と、前の図形の$\frac{1}{9}$倍になります。
増える正三角形の個数は、
3個→12個→48個→192個
と、前に増えた正三角形の個数の4倍になります。
よって、
$\frac{1}{729} \times 192 = \frac{64}{243}$(cm²)

図形	1	2	3	4	5
面積(cm²)	9				
増える正三角形の面積の和(cm²)		3	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{63}{243}$
増える正三角形1個の面積(cm²)		1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{729}$
増える正三角形の個数(個)		3	12	48	192